数理解析研究所講究録
487巻 1983年 43-64

Equivariant Sphere Theorem

早大 教育 相馬輝彦 (Teruhiko Soma)

Gを集合Xに作用しているgroupとする。Xの部分集合YがG-equivariantであるとは，Gの各元gに対して$g \cdot Y = Y$あるいは$g \cdot Y \cap Y = \phi$のいずれかが起ることをいう。

3-manifold Mにembedされた2-sphere SがMの中のembedded 3-ballをboundしないとき，Mの中でessentialであるという。また3-manifoldがessential 2-sphereを含まないとき，irreducibleであるという。

このノートにおける我々の目的は次の定理を証明することである。Meeks-Simon-Yau[3]はより一般的な結果を得ているが，ここで与える証明は講演者が独立に考えていたものである。

定理(Equivariant Sphere Theorem)．Mをcompact, orientable 3-manifoldとする。GをM上にorientation preserving C^{∞}-diffeomorphismsとして作用している

finite group とする。もし M が irreducible でないならば, M は G-equivariant essential 2-sphere を含む。

この定理の応用として次の2つの系が得られる。定理から系1を証明するのは簡単な練習問題である。系2は Sakuma [7, Theorem 2(b)] の議論に上の定理を適用すればよい。

系1. M を compact, orientable 3-manifold, $p:\tilde{M}\to M$ を finite covering とする。このとき M が irreducible であるための必要十分条件は $\tilde{M}$ が irreducible になることである。

系2. $p:M\to S^3$ を S^3 の中の link L に branch している regular branched covering とする。このとき M が irreducible であるための必要十分条件は L が prime (すなわち non-composite かつ non-splittable) となることである。

§1. 準備

このノートの中では常に C^∞-category で議論する。またすべての 3-manifolds は orientable であると仮定しておく。

Surface F の中の simple loop l が essential であるとは,

l が F の中で contractible でないことをいう。同様に proper simple arc $(\alpha, \partial\alpha)$ in $(F, \partial F)$ が essential であるとは, α が ∂F の中のいかなる arc にも homotopic rel $\partial\alpha$ でないことをいう。

M を compact 3-manifold とし, E を ∂M に embed された surface とする。また F を S^2, D^2 以外の compact surface, $f:(F, \partial F) \to (M, E)$ を continuous map とする。もし $f_*: \pi_1(F) \to \pi_1(M)$ が injective であれば, f は incompressible map と呼ばれる。また $f_*: \pi_1(F, \partial F) \to \pi_1(M, E)$ が injective のとき, f は ∂-incompressible in (M, E) であるという。Incompressible map (∂-incompressible map) $f:(F, \partial F) \to (M, E)$ が embedding であるとき, $f(F)$ を incompressible (∂-incompressible) surface in (M, E) という。

3-manifold M が atoroidal であるとは, M が含む任意の incompressible torus は ∂M のある component と平行であり, かつ M が incomprecible, ∂-incompressible annulus を含まないことをいう。

Compact, irreducible 3-manifold が 2-sided incompressible surface を含むとき, Haken manifold という。

M を metric g を持つ riemannian manifold とし, F を compact, orientable surface とする。$f: F \to M$ を

piecewise smooth map とするとき，f の area $A(f)$ を次の式で定義する。

$$A(f)=\int_F \omega$$

ただし，ω は F の local coordinate (x,y) に対して

$$\omega=\sqrt{|f_x|^2|f_y|^2-g(f_x,f_y)}\,dx\,dy$$

で定義される 2-form とする（$|f_x|^2=g(f_x,f_x)$）。

Piecewise smooth map $f:(F,\partial F)\to(M,E)$ がその proper homotopy class の中の任意の piecewise smooth map h に対して $A(f)\leqq A(h)$ となるとき least area map であるという。

定理（Freedman-Hass-Scott [2]）．M を incompressible な境界 ∂M をもつ Haken manifold とし，E を ∂M に embed された compact, incompressible surface とする。また M 上に ∂M が convex となるような riemannian metric が定義されていると仮定する。F を compact, orientable surface とし，$f:(F,\partial F)\to(M,E)$ を incompressible, ∂-incompressible embedding とするとき，次の (i), (ii) を満足する least area map $h:(F,\partial F)\to(M,E)$ が存在する。

(i) h は f に properly homotopic in (M, E)。

(ii) h は embedding であるか，または $h(F)$ は M の 1-sided proper submanifold でありかつ $h: F \to h(F)$ が double covering になる。

ここで ∂M が convex とは，∂M の各点における mean curvature vector field が zero であるか inward pointing になることをいう。与えられた compact 3-manifold M 上に ∂M が convex になるような riemannian metric を定義するのは容易である。

M を riemannian 3-manifold とする。また F を riemannian metric μ を持つ compact orientable surface とし，$f: F \to M$ を piecewise smooth map とする。このとき，f の energy $E(f, \mu)$ を次の式で定義する。

$$E(f, \mu) = \int_F |df|^2 \, d\mu$$

ただし，$d\mu$ は (F, μ) の area form とする。F 上の2つの metrics μ_1, μ_2 が同じ conformal structure を定義するとき，$E(f, \mu_1) = E(f, \mu_2)$ であるのはよく知られている。したがって μ の定義する F 上の conformal structure を σ とするとき，$E(f, \mu) = E(f, \sigma)$ と書く

ことができる。

§2. Equivariant Sphere Theorem の証明

Mを compact, 3-manifold とし, GをMに orientation preserving C^∞-diffeomorphism として作用している finite group とする。∂M の component に 2-sphere があるとき, 定理の証明は自明である。

(2.1) ∂M の各 component は 2-sphere でないと仮定できる。

点 $x \in M$ における G の isotropy subgroup を $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ とする。このとき $\Sigma = \{x \in M \mid G_x \neq \{1\}\}$ は M の 1-dimensional subcomplex になる(図1)。特に G が free な作用のときは, $\Sigma = \emptyset$ である。$N(\Sigma)$ を M における Σ の G-invariant regular neighborhood とする(Bredon [1, Chapter VI, Theorem 2.2] 参照)。このとき G の作用の $M_1 = M - \mathrm{int}\, N(\Sigma)$ 上への制限は free な作用を定義する。したがって quotient map $p: M \to M/G$ の M_1 上への制限 $p|M_1: M_1 \to M_1/G$ は (unbranched) covering である。$\bar{\Sigma} = p(\Sigma)$ は M/G 内の 1-dimensional subcomplex となり,

$N(\bar{\Sigma}) = p(N(\Sigma))$ は $\bar{\Sigma}$ の M/G における regular neighborhood となる(図1)。

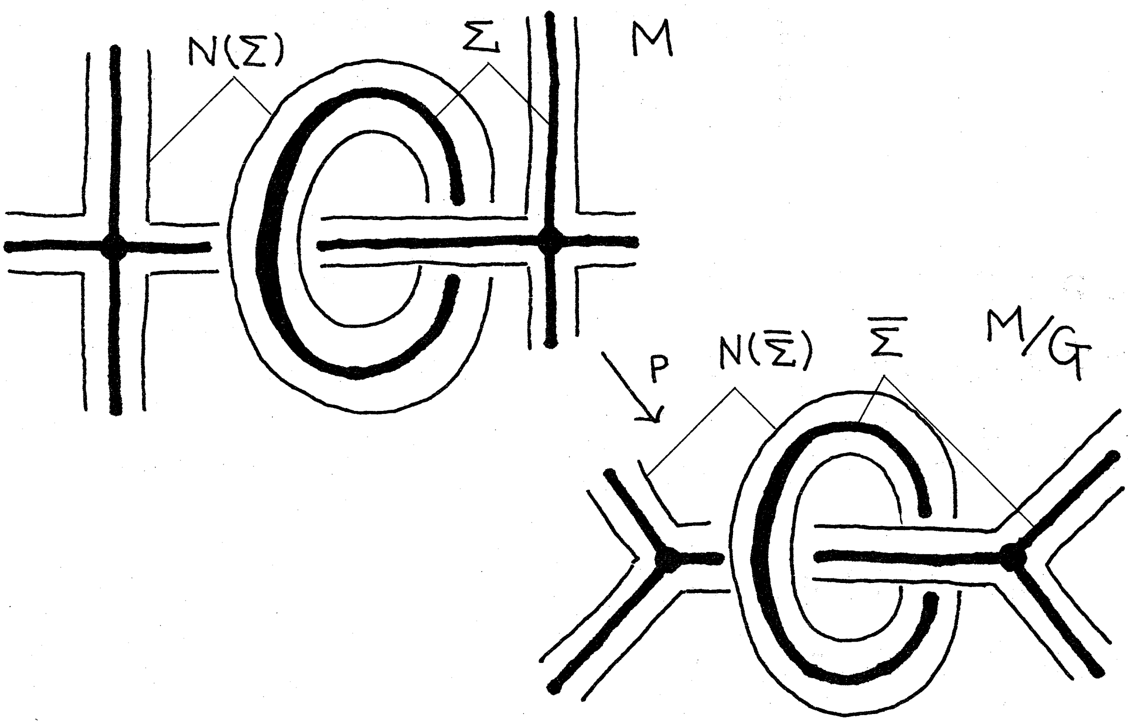

図1

(2.2) $\partial(M_1/G)$ の各 component は 2-sphere でない。

証明. $\partial(M_1/G)$ のある component S が 2-sphere であるとする。もし $S \cap \partial N = \phi$ ならば, $S \subset \partial(M/G)$ でありかつ $p|p^{-1}(S) : p^{-1}(S) \to S$ は covering になる。$p^{-1}(S) \subset \partial M$ であるから, これは(2.1)に矛盾する。もし $S \cap \partial N \neq \phi$ ならば, S は $\partial N(\bar{\Sigma})$ のある component A を含む。このとき適当な embedded 2-disk $(D, \partial D) \subset (M_1/G, A)$ を取れば, ∂D が $\bar{\Sigma}$ と1点で transverse に交わるような $N(\bar{\Sigma})$ の中の disk D_1 を bound するようにできる(図2)。

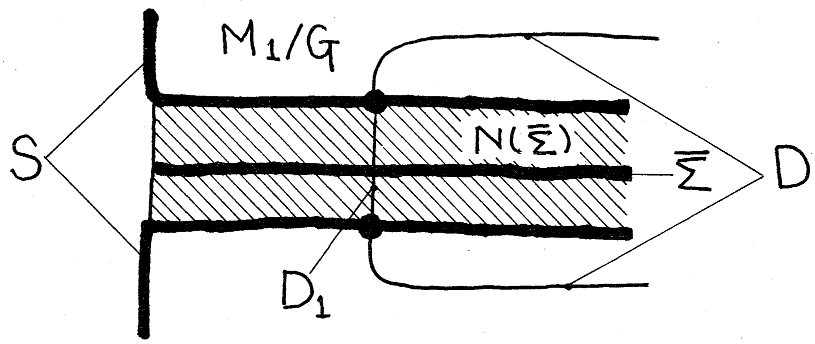

図2

このとき $D \cup D_1$ は $\overline{\Sigma}$ と transverse に1点で交わる M/G の中の 2-sphere であるが，このような 2-sphere は存在し得ない（Thurston [9, Chapter 13] 参照）。 □

Myers [5] より，$\mathrm{int}\, M_1/G$ の中の simple loop l で $M_1/G - \mathrm{int}\, N(l)$ が atoroidal, irreducible, ∂-irreducible になるようなものが存在する。ここで $\overline{N} = N(\overline{\Sigma}) \cup N(l)$ とおく。

$\overline{\Sigma} \cup l$ の各 simple loop component 上の1点を指定しておく。それらの点と $\overline{\Sigma}$ の vertices 全てからなる集合を V とし，$\overline{\Sigma} \cup l - V$ の各 arc component に対して $\partial \overline{N}$ 上に互いに disjoint な embedded annulus を図3のように対応させる。このような annuli 全体の和集合を $\overline{E}$ と書く。(2.2) の証明と同様の議論によって，$\overline{E}$ が incompressible in $M/G - \mathrm{int}\,\overline{N}$ であることを示すことができる。$E = p^{-1}(\overline{E})$, $N = p^{-1}(\overline{N})$, $C = M - \mathrm{int}\, N$ とおくと，$p|C : C \to M/G - \mathrm{int}\,\overline{N}$ は unbranched covering であるから，E は incompressible in C であり，C は irreducible，∂-irreducible，atoroidal 3-manifold である。

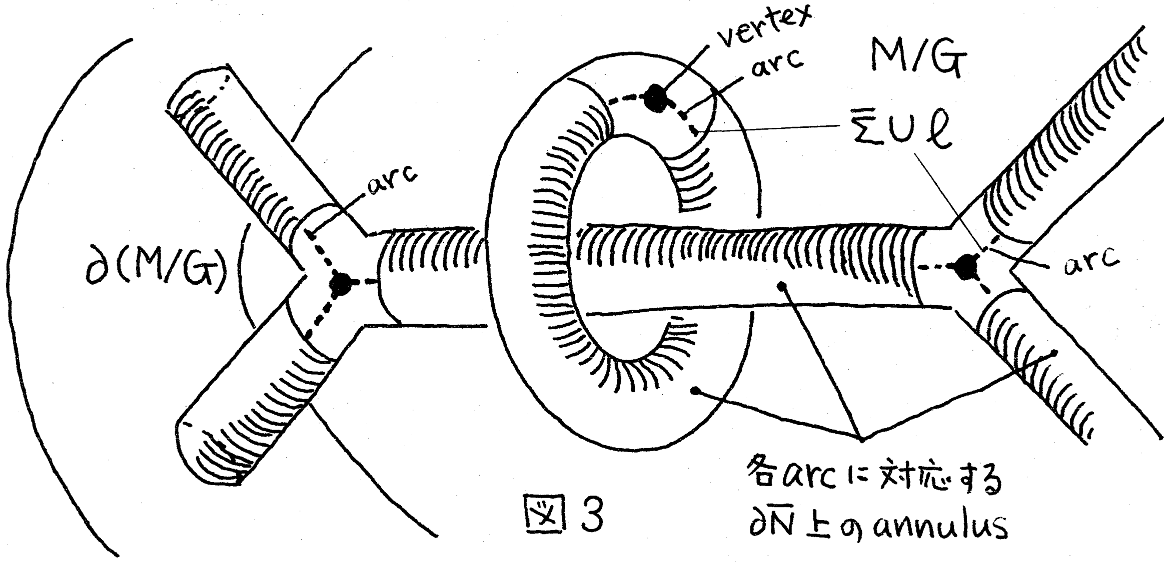

図3

S を M に embed された essential 2-sphere とする。もし $S\cap N=\phi$ であれば，$S\subset C$ となり，S が essential in M であることに反する。よって $S\cap N\neq\phi$。この S を M の中の isotopy で動かして $S\cap\partial N\subset E$ かつ $S\cap N$ が solid handlebody N の meridian disks になるようにできる。$P=S-\mathrm{int}(S\cap N)$ とおくと，$(P,\partial P)$ は (C,E) に proper に embed された planar surface である（図4）。

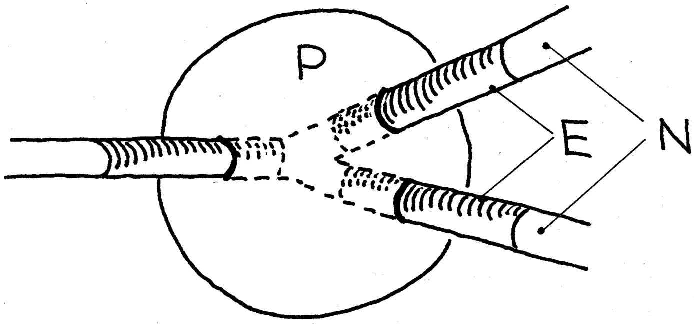

図4

逆に $(P, \partial P)$ を (C, E) 内の planar surface とし，∂P の各 component $\partial_i P$ が N の中の互いに disjoint な meridian disk D_i を bound するとき，P は completion 可能であるといい，$\mathcal{S}(P) = P \cup (\underset{i}{\cup} D_i)$ を P の completion という。$\mathcal{S}(P)$ は（isotopy in M を除けば）$\{D_i\}$ の取り方によらない。

集合 $\mathcal{P}$ を次ようように定義する。

$$\mathcal{P} = \left\{ (P, \partial P) \subset (C, E) \;\middle|\; \begin{array}{l} P \text{ は completion 可能な planar} \\ \text{surface, } \mathcal{S}(P) \text{ は essential in } M \end{array} \right\}$$

上の議論より，$\mathcal{P} \neq \emptyset$。

Topological space X に対してその connected component の個数を $|X|$ で表すことにする。

$\mathcal{P}_0 = \{ P \in \mathcal{P} \mid |\partial P| = n \}$

とおく。ただし $n = \min\{ |\partial P| \mid P \in \mathcal{P} \}$。$\mathcal{P}_0$ の各元 P が incompressible, ∂-incompressible in (C, E) であることは容易に示される。

(2.3) $n > 2$。

この証明は C が atoroidal でありかつ E が incompressible in C であることより明らか。

これ以後は，C 上には常に ∂C が convex になるような G-invariant riemannian metric が定義されているとす

る。このような metric が定義できるのを示すのは容易である(Bredon [1, Chapter VI, Theorem 2.1] 参照)。

$|\partial \overline{P}| = n$ となる planar surface $\overline{P}$ を1つ固定しておく。$\mathcal{P}_0$ の各元 P に対し, embedding $f_P : \overline{P} \to C$ で $f_P(\overline{P}) = P$ になるものを1つ対応させる。Freedman-Hass-Scott の定理により, f_P は least area map h_P に proper homotopic であり, かつ h_P は embedding であるか, あるいは M の中の 1-sided submanifold $h_P(\overline{P})$ 上の double covering である。

注意. f_P に対して, その proper homotopy class の中の least area map は唯一つとは限らないが, その中の1つを指定して h_P とおく。

compact, orientable surface F から M への proper immersion の列 $\{f_n\}$ で $\{A(f_n)\}$ が有界となるものがあるとき, それらの面積 $A(f_n)$ の中で最小のものを求めようとするとき, $A(f_n)$ の代りに f_n の energy $E(f_n)$ を利用する場合がある。f_n によって M から induce される conformal structure を σ_n とすると, $A(f_n) = \frac{1}{2} E(f_n, \sigma_n)$ となる。もし F が 2-disk であれば, F 上に定義できる conformal structure は唯一つであるから, $A(f_n) = \frac{1}{2} E(f_n)$

と書くことができる。しかし一般の場合はF上に定義できるconformal structureは一意的でない。したがって$\{f_n\}$に何らかの条件を付けることによって，$\{\sigma_n\}$をcontrolしなければならない。Schoen-Yau [8, Theorem 3.1] は各f_nがincompressible, ∂-incompressibleであれば，$\{\sigma_n\}$はFのmoduli $R(F)$の中のcompact集合に含まれることを示した。よって，この場合（必要ならば部分列を取ることによって）$\sigma_n \to \sigma \in R(F)$と仮定できる。

(2.4) 補題．$A(h_{P_0}) = \inf\{A(h_P) \mid P \in \mathcal{P}_0\}$を満たす$P_0 \in \mathcal{P}_0$が存在する。

証明．補題が成立しないとすると，$\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}_0$で

$$A(h_1) > A(h_2) > A(h_3) > \cdots$$

を満足するものが存在する。ただし$h_n = h_{P_n}$とする。σ_nをh_nによってinduceされた$\overline{F}$上のconformal structureとすると，$E(h_n, \sigma_n) = 2A(h_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$は有界である。上で注意したように$\sigma_n \to \sigma \in R(\overline{F})$と仮定できる。$\{h_n\}$の部分列$\{h_{n_k}\}$でharmonic map $h \in C^1(\overline{F} - \{z_1, \ldots, z_q\})$に収束するものが存在する（Sacks-Uhlenbeck [6, Theorem 2.3] 参照）。このとき十分大きなk, l $(k < l)$に対してh_{n_k}はh_{n_l}にproperly homotopic in (C, E)になる。$A(h_{n_k}) > A(h_{n_l})$であるから，

これは h_{n_k} が least area map であることに反する。よって補題は証明された。□

$h_{P_0}=h_0$, $\mathrm{Im}\, h_0=Q$ とおく。$(Q,\partial Q)$ は (C,E) の 1-sided あるいは 2-sided の proper submanifold である。

まず Q が G-equivariant であることを示す。もしそうでないならば、G のある元 g に対して $Q\neq g\cdot Q$ かつ $Q\cap g\cdot Q\neq\emptyset$ が成立する。このようなことが起こらないことをいうには、次の3つの場合が成立しないことを示せばよい。

場合1．h_0 は embedding であり，かつ Q は $g\cdot Q$ と transverse に交わる。

C の subset A に対し，$\mathcal{D}A$ で A とその copy A' を $A\cap E$ に沿って貼り合せたものを表わすことにする。特に $A\cap E=\emptyset$ のとき $\mathcal{D}A$ は A と A' の disjoint union である。Waldhausen [10, Proposition 5.4] により，Q は P_0 に isotopic in (C,E) である。よって $Q\in\mathcal{P}_n$。Q, $g\cdot Q$ を completion するための N の meridian disks $\{D_i\}_{i=1}^n$, $\{\bar{D}_i\}_{i=1}^n$ を適当に取ることによって，$\mathcal{S}(Q)$ は $\mathcal{S}(g\cdot Q)$ に transverse に交わり，かつ $D_i\cap\bar{D}_i$ は proper arcs in $D_i(\bar{D}_i)$ のみからなるようにできる。Minimal surface の標準的議論により次の (2.5)（したがって (2.6)）が示される。

(2.5) $Q \cap g \cdot Q$ の各 arc(および loop) component は Q, $g \cdot Q$ のいずれにおいても essential である。

(2.6) $\mathcal{D}Q \cap \mathcal{D}(g \cdot Q)$ の各 loop component は $\mathcal{D}Q$, $\mathcal{D}(g \cdot Q)$ のいずれにおいても essential である。

$\mathcal{S}(Q) \cap \mathcal{S}(g \cdot Q)$ の simple loop component で bound される $\mathcal{S}(Q)$ または $\mathcal{S}(g \cdot Q)$ の中の各 disk D に対して，その complexity $c(D)$ を次の辞書的順序対で定義する。

$$c(D) = (-\chi(\mathcal{D}(D \cap C)),\ A(D \cap C)).$$

ここで $D \cap C$ の代りに $\mathcal{D}(D \cap C)$ の Euler 標数を考えるのは，$\partial(\mathcal{D}(D \cap C))$ の各 component が loop になり Euler 標数の計算が容易になるからである(図5)。

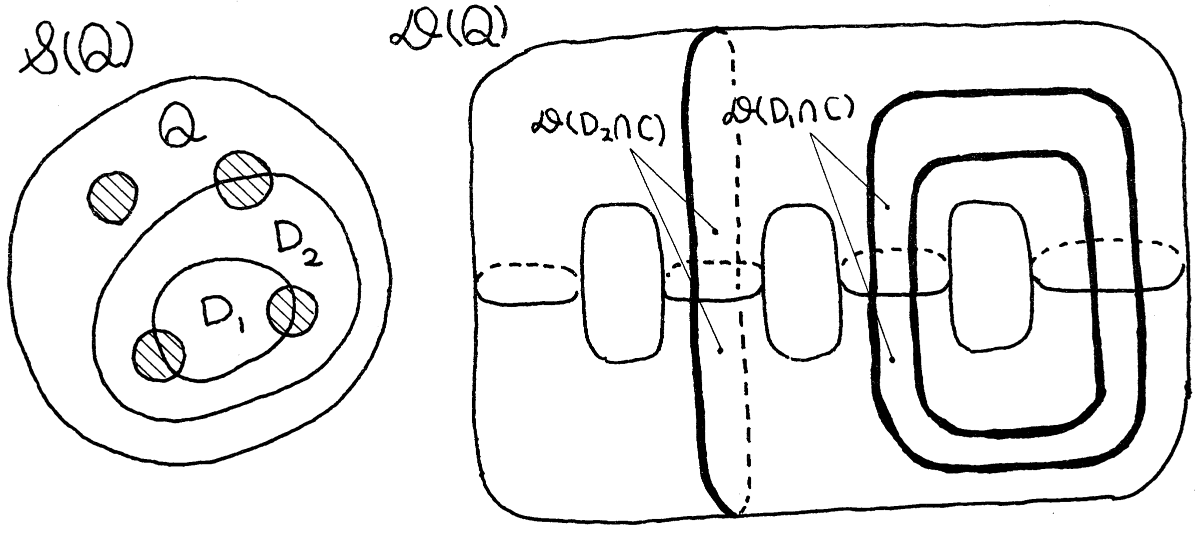

図5

また (C, E) に proper に embed された planar surface (connectedでなくてもよい) $(P, \partial P)$ の complexity を $c(P) = (-\chi(P), A(P))$ で定義する。$-\chi(\mathcal{D}P) = -2\chi(P)$ であることに注意せよ。

$D_1 \subsetneqq D_2$ のとき, $A(D_1 \cap C) < A(D_2 \cap C)$ でありかつ $\mathcal{D}(D_1 \cap C) \subsetneqq \mathcal{D}(D_2 \cap C)$ である。このとき $-\chi(\mathcal{D}(D_2 \cap C)) = -\chi(\mathcal{D}(D_1 \cap C)) - \chi(\mathcal{D}\overline{(D_2 \cap D_1)} \cap C)$ であり, (2.6)より $-\chi(\overline{\mathcal{D}(D_2 - D_1)}) \geqq 0$ であるから, $-\chi(\mathcal{D}(D_2 \cap C)) \geqq -\chi(\mathcal{D}(D_1 \cap C))$ となる。したがって $c(D_1) < c(D_2)$ となる。よって complexity が最小の disk D_0 は inner most disk である。ここで $D_0 \subset \mathcal{S}(g \cdot Q)$ と仮定してよい。∂D_0 は $\mathcal{S}(Q)$ を2つの disks D_1, D_2 に separate する。$S_i = D_0 \cup D_i$, $P_i = S_i \cap C$ とおく。少なくとも S_1, S_2 の一方は essential in M であるが, P_1, P_2 が completion 可能かどうか, あるいは connected であるかどうかも自明でない。

まず S_1 は essential in M であると仮定してよい。$c(D_0) \leqq c(D_2)$ より, $c(P_1) \leqq c(Q)$ である。

(2.7) P_1 は disk component を持たない。

証明. P_1 が disk component Δ を持ったとする。$\Delta \cap \partial D_0 = \phi$ ならば, $\Delta \subset Q$ (または $\Delta \subset g \cdot Q$) であり, $\partial \Delta \subset E$ より $\partial C \subset \partial Q$ (または $\partial C \subset \partial(g \cdot Q)$)。よって $\Delta = Q$ (または $\Delta = g \cdot Q$ となり, (2.3)に矛盾する。$\Delta \cap \partial D_0 \neq \phi$ のとき,

Δにおける$\Delta \cap \partial D_0$の中のinner most arc(またはloop) αはΔの中のdisk Δ_0を切り取る。Δ_0はQ(または$g\cdot Q$)に含まれるから，αはinessential in Q(またはin $g\cdot Q$)となり，(2.5)に矛盾する。よって(2.7)が成立する。□

ここでP_1はsmoothなembeddingではないので，folding curveを持っている。P_1を(C, E)の中の適当なC^0-isotopyでdeformすることにより，そのfolding curveを解消して$A(P_1') < A(P_1)$となるplanar surface P_1'が得られる(Meeks-Yau [4, Lemma 7]参照)，(図6)。S_1のこのisotopyによる結果をS_1'とする。

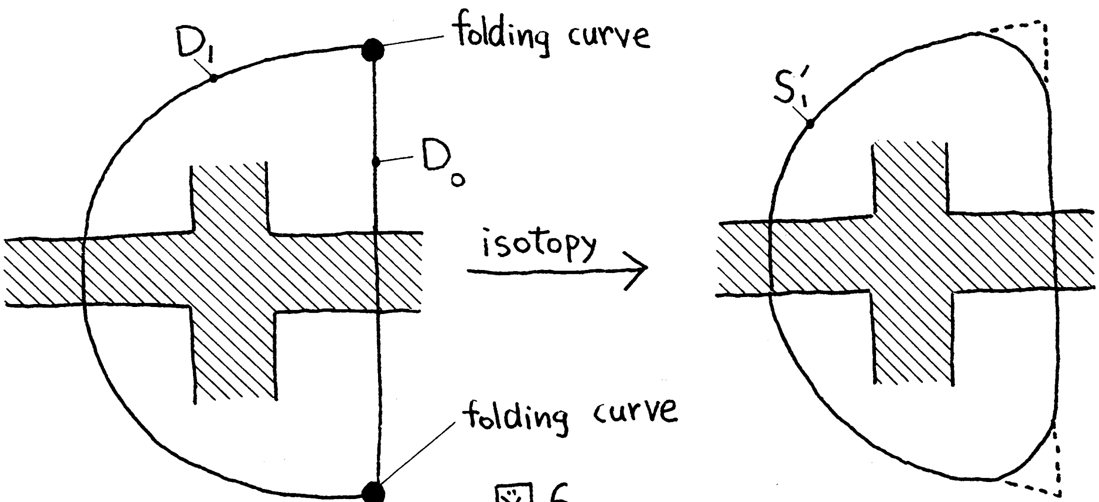

図6

このとき$c(P_1') < c(Q)$である。P_1'がcompletion可能でないときは少なくとも次の(a)または(b)が起こる。

(a) $\partial P'$のあるcomponentがEでcontractible。

このときE内の2-diskΔで$\Delta\cap\partial P_1'=\partial\Delta$となるものが存在する。このとき$S_1'$を$\Delta$に沿ってsurgeryすることによって2つの2-spheres S_{11}, S_{12}が得られる(図7)。

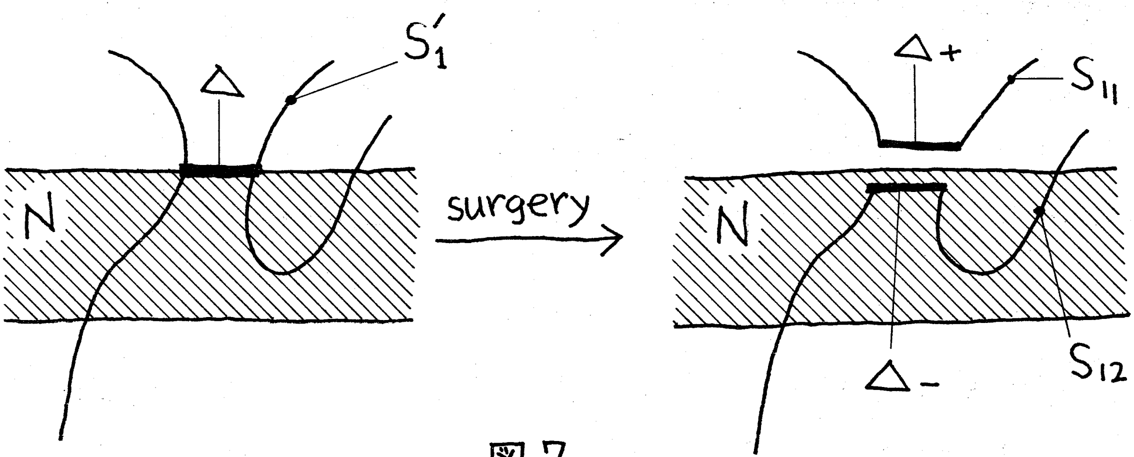

図7

$P_{1i}=S_{1i}\cap C$とおく。(2.7)より$-\chi(P_{11})<-\chi(P_1')$, $-\chi(P_{12})\leqq-\chi(P_1')$かつ$A(P_{12})<A(P_1')$。明らかに$P_{12}$はdisk component を持たない。$P_{11}$がdisk component Dを持つならば、明らかに$D\supset\Delta_+$である。Eはincompressible in Cであるから，∂DはEの中のdisk Δ_1をboundする。Bを$\Delta_1\cup D$によってboundされるCの中の3-ballとする。S_{11}をBのMの中での十分小さな近傍$N(B)$をsupportとしてもつisotopyでdeformして，DをNの中に押し込むようにできる(図8)。S_{11}のこのisotopyによる結果をS_{13}とし，$P_{13}=S_{13}\cap C$とする。P_{13}はP_1'のcomponentsのいくつかからなるproper subsetになる。よって(2.7)より$-\chi(P_{13})\leqq-\chi(P_1')$,

$A(P_{13}) < A(P_1')$である。

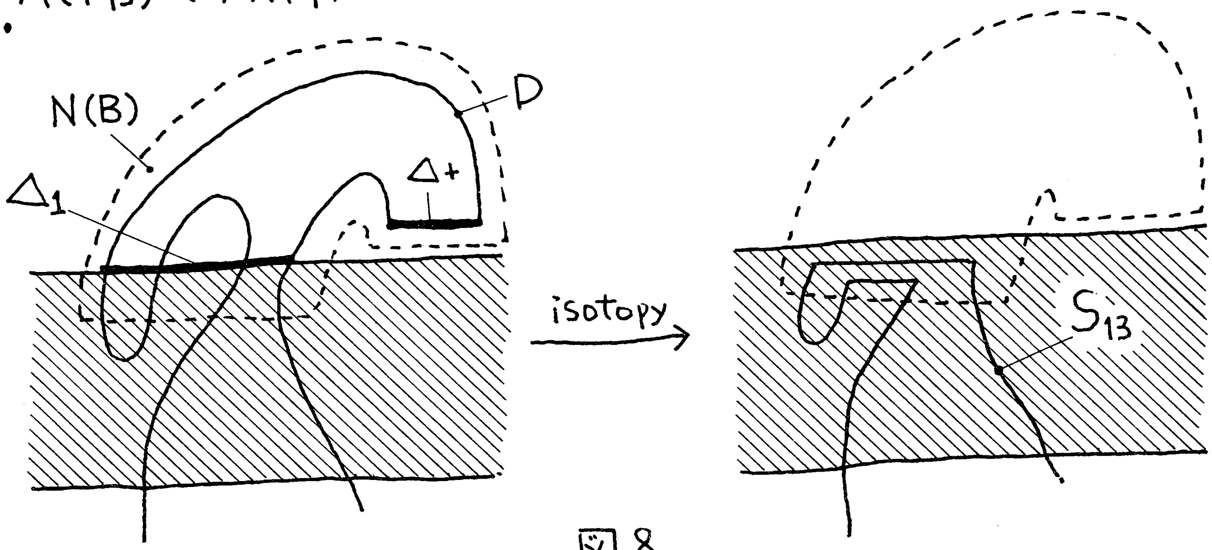

図8

したがって S_{1i} $(i=1,2,3)$ の中の少なくとも1つはessential in Mであり，P_{1i}はdisk componentを持たず，かつ$c(P_{1i}) < c(P')$である。またP_{1i}の作り方から，$|P_{1i}| - \chi(P_{1i}) < |P_1'| - \chi(P_1')$である。したがって上のような操作は有限回で終り，その結果としてできた2-sphereをS_aとすると，S_aはessential in M，$P_a = S_a \cap C$はdisk componentを持たない，∂P_aの各componentはessential in E，かつ$c(P_a) < c(P')$。

S_aがP_aのcompletionによる2-sphereでないときは，次の(b)が起る。

(b) $S_a \cap N$のcomponentでdiskでないものが存在する。

このとき$S_a \cap N$はcompressible in Nである。Δを$S_a \cap N$のNにおけるcompressing diskとする。S_aをΔに沿って

surgeryすることによって2つの2-spheres S_{a1}, S_{a2}が得られる(図9)。$P_{ai}=S_{ai}\cap C$とおく。

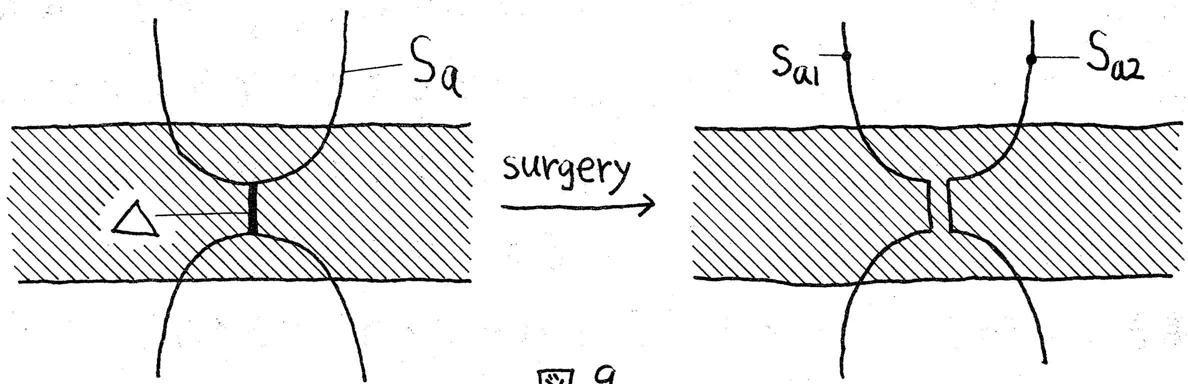

図 9

S_{a1}はessential in Mであると仮定できる。P_{a1}はP_aのいくつかのcomponentsからなるproper subsetである。P_aはdisk componentを持たないから，$c(P_{a1})<c(P_a)$である。また$|P_{a1}|<|P_1|$であるから，このような操作は有限回で終る。その結果できた2-sphereをS_bとし，$P_b=S_b\cap C$とすると，S_bはessential in M，$c(P_b)<c(P_1')<c(Q)$，$S_b\cap N$はNのmeridian disks。特に$P_b\in\mathcal{P}$である(P_1'に対して(a),(b)が成立しないとき，$P_1'=P_b$とする)。このとき$c(P_b)<c(Q)$。もし$-\chi(P_b)<-\chi(Q)$であれば，$|\partial P_b|<|\partial Q|=n$となり$n$の定義に矛盾する。$-\chi(P_b)=-\chi(Q)$，$A(P_b)<A(Q)$であれば，$P_b\in\mathcal{P}_0$であるから補題(2.4)に矛盾する。よって場合1は起こり得ない。

場合2．h_0はembeddingであるが，Qと$g\cdot Q$のintersection は transverse でない。

[4, Lemma 2] より Q と $g\cdot Q$ は有限個の点を除いて transverse に交わる。このとき任意の正数 ε に対して，これらの有限個の点の十分小さな近傍を support としてもつような isotopy によって Q を動かし Q' を作り，Q' は $g\cdot Q'$ と transverse に交わりかつ $A(Q') < A(Q)+\varepsilon$ となるようにできる。このときも場合 1 と同様にして P_1 から P_1' を作ることができるが，この P_1' に対して $A(P_1') < A(P_1)-\varepsilon \leqq A(Q')-\varepsilon < A(Q)$ が成立するように上の ε を選ぶことができる（[2, Lemma 1.3] 参照）。以下、場合 1 と同様にして場合 2 が起らないことが証明できる。

場合 3．$h_0 : \overline{P} \to Q \subset M$ が double covering。

任意の $\varepsilon > 0$ に対し，Q の regular neighborhood $N(Q)$ が存在して，$Q' = \overline{(\partial N(Q) - \partial N(Q) \cap E)}$ とおいたとき，$A(Q') < A(h_0)+\varepsilon$ となりかつ Q' と $g\cdot Q'$ が transverse に交わるようにできる。この場合も場合 1, 2 と同様にして起こらないことが証明できる。

したがって Q は G-equivariant である。h_0 が embedding のときは $Q=P$ とおく。h_0 が double covering のときは，Q の G-equivariant regular neighborhood $N(Q)$ に対して，場合 3 と同様にして作った Q' を P とする。いずれの場合も P は G-equivariant でありかつ $P \in \mathcal{P}_0$ である。よって

$\mathcal{S}(P)$として G-equivariant であるものが存在する。$\mathcal{S}(P)$は essential in M であるから，これが我々が求めていた 2-sphere である。これで証明を終わる。□

参考文献

[1] G. Bredon, Introduction to compact transformation groups, Academic Press 1972.

[2] M. Freedman, J. Hass and P. Scott, Least area incompressible surfaces in 3-manifolds (to appear).

[3] W. Meeks III, L. Simon and S.-T. Yau, Embedded minimal surfaces, exotic spheres, and manifolds with positive Ricci curvature, Ann. of Math. 116 (1982), 621-659.

[4] W. Meeks III and S.-T. Yau, The classical Plateau problem and the topology of three-dimensional manifolds — the embedding of the solution given by Douglas-Morrey and an analytic proof of Dehn's lemma, Topology 21 (1982), 409-442.

[5] R. Myers, Simple knots in compact orientable

3-manifolds, Trans. A. M. S. 273 (1982), 75-91.

[6] J. Sacks and K. Uhlenbeck, Minimal immersions of closed Riemannian surfaces, Trans. A.M.S. 271 (1982), 639-652.

[7] M. Sakuma, On regular coverings of links, Math. Ann. 260 (1982), 303-315.

[8] R. Schoen and S.-T. Yau, Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negative scalar curvature, Ann. of Math. 110 (1979), 127-142.

[9] W. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds (to appear).

[10] F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. of Math. 87 (1968), 56-88.